ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1993

OPTION M'

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

L'objectif de ce problème est de déterminer le nombre de composantes connexes par arcs des complémentaires de certaines courbes planes.

On désigne par $\mathbb{C}$ le plan complexe et par f une fonction d'une variable réelle de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) f est périodique (on note T sa plus petite période)

(ii) si $f(s) = f(t)$, alors $s - t$ est un multiple entier de T

(iii) $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

On notera Γ la courbe image de f et $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ son complémentaire dans $\mathbb{C}$.

I

1.a) Construire une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 et telle que la fonction $g = f \circ \varphi$ ait les propriétés suivantes :

(i) g est périodique (on note L sa plus petite période)

(ii) si $g(s) = g(t)$, alors $s - t$ est un multiple entier de L

(iii) $|g'(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

b) Quelle est la signification géométrique de L ?

c) Quelles relations y a-t-il entre deux telles fonctions φ ?

A partir de maintenant on considèrera uniquement la fonction g.

II

2) On fixe un point z dans $\mathbb{C}\backslash\Gamma$; en étudiant les extrema de la fonction $t \mapsto |z - g(t)|^2$, démontrer qu'il existe au moins deux points distincts de Γ, soient $g(t_1)$ et $g(t_2)$, tels que la droite passant par z et par $g(t_i)$ soit orthogonale au vecteur $g'(t_i)$ pour $i = 1, 2$.

3) On fixe un nombre réel $K \in]0, 1[$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $\alpha \in]0, L/2[$ tel que :

a)

$$(s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad |s - t| < \alpha \Rightarrow |g'(s) - g'(t)| < K \quad .$$

b)

$(s\,,t) \in \mathbb{R}^2\,,\ 0 < |s-t| < \alpha \Rightarrow |g(s) - g(t) - (s-t)\,g'(t)| < K\,|s-t|$.

Le nombre α est ainsi choisi dans toute la suite.

4) On note β la borne inférieure des nombres $|g(s) - g(t)|$ pour tous les couples $(s\,,t) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$|s - t + nL| \geqslant \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{Z}\ .$$

Montrer que β est strictement positif.

5) Pour tout réel $\varepsilon \in \left]0\,,\beta\right[$ on définit deux courbes Γ_ε^+ et Γ_ε^- par les paramétrages

$$g_\varepsilon^\pm(t) = g(t) \pm i\,\varepsilon g'(t)\ .$$

Déterminer les intersections de Γ_ε^+ et Γ_ε^- avec Γ.

Dans ce qui suit, on fixe un réel $\varepsilon \in \left]0\,,\beta\right[$ et on pose

$$z^\pm = g_\varepsilon^\pm(0)\ .$$

On appelle *arc* toute application continue de $[\,0\,,1\,]$ dans $\mathbb{C}$.

6) Démontrer que tout point de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ peut être joint à au moins l'un des points z^+ , z^- par un arc contenu dans $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

III

Dans les questions **7)** à **10)** on se propose de démontrer qu'il n'existe pas d'arc joignant z^+ à z^- et contenu dans $\mathbb{C}\backslash\Gamma$; procédant par l'absurde, on suppose qu'il existe un tel arc que l'on note γ.

7) Soient h une application de classe C^1 de $[\,0\,,L\,]$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $|h(t)| = 1$ pour tout t , et a un nombre réel vérifiant $h(0) = e^{ia}$. Construire, à l'aide d'une intégrale portant sur $\dfrac{h'(t)}{h(t)}$, une fonction réelle k , de classe C^1 , telle que

$$\forall t \in [\,0\,,L\,] \qquad h(t) = e^{ik(t)} \quad \text{et} \quad k(0) = a\ .$$

Démontrer l'unicité de k .

8) Pour tout $s \in [\,0\,,1\,]$ on définit une application h_s de $[\,0\,,L\,]$ dans $\mathbb{C}$ par

$$h_s(t) = \frac{g(t) - \gamma(s)}{|g(t) - \gamma(s)|}$$

et on choisit un réel a_s vérifiant $h_s(0) = e^{ia_s}$ et dépendant continûment de s ; on note k_s la fonction associée à h_s et a_s comme à la question 7).

Enfin, on pose :

$$n_s = k_s(L) - k_s(0) \quad .$$

Exprimer n_s à l'aide d'une intégrale portant sur g, g' et γ ; exprimer ensuite n_0 et n_1 à l'aide d'intégrales portant sur g, g' et ε.

9.a) Démontrer que lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0+$, les expressions

$$\int_a^{L-a} \left(\frac{g'(u)}{g(u) - g(0) - i\varepsilon g'(0)} - \frac{g'(u)}{g(u) - g(0) + i\varepsilon g'(0)} \right) du$$

et

$$\int_{-a}^{a} \left(\frac{g'(u)}{g(u) - g(0) - i\varepsilon g'(0)} - \frac{g'(u)}{g(u) - g(0) + i\varepsilon g'(0)} \right) du$$

ont pour limites respectives 0 et $2i\pi$.

b) En déduire la valeur de $n_0 - n_1$.

10) Démontrer que n_s est indépendant de s. Conclure.

11.a) Déterminer le nombre des composantes connexes par arcs de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

b) Déterminer le nombre de celles de ces composantes qui sont bornées.

[On rappelle que, si X est une partie de $\mathbb{C}$, les composantes connexes par arcs de X constituent une partition de X ayant la propriété suivante : deux points de X peuvent être joints par un arc si et seulement s'ils appartiennent à une même composante connexe par arcs].